代数幾何学シンポジウム記録
1989年度　pp.25-40

商特異点を持つホモロジー平面について

阪大理　宮西　正宜
京大理　杉江　徹

§1. 序

Xを複素数体$\mathbb{C}$上で定義された非特異代数曲面とする。Xのホモロジー群$H_i(X, \mathbb{Z})$が$i \geqq 1$に対して自明である時、Xをホモロジー平面という。我々は、昨年の城崎シンポジュームで、ホモロジー平面についてそれまで知られていた結果を紹介し、同時に小平次元$\kappa = 2$のホモロジー平面の、新しい無限個の例を構成した。またホモロジー平面の研究は、$\mathbb{C}^*$の$\mathbb{C}^3$への代数的な作用の *linearization* の問題と関連し、特に次の *Petrie* の予想を解決することが我々の目標であった。

Homology plane conjecture　自明でない、有限位数の自己同型を持つホモロジー平面は、$\mathbb{C}^2$に同型である。

さて、我々は、ホモロジー平面の概念を少し拡張し、$H_i(X; \mathbb{Q}) = 0$ $({}^\forall i \geqq 1)$ のとき、Xを$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面という。

また、Xが高々商特異点のみを持つ正規曲面で、$H_i(X;\mathbb{Z})=0$ のとき、log-ホモロジー平面，$H_i(X;\mathbb{Q})=0$ の時、log-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面という。$\kappa=0$ の $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は、藤田氏によって分類されており、その中には自明でない自己同型を持つものが存在する。また、Xがホモロジー平面で有限位数の自己同型を持てば、X/σ は、log-ホモロジー平面になる。以上の様な理由から、我々は考える対象を拡げて log-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面の分類（$\kappa\leq 1$ のケース）や例の構成（$\kappa=2$ のケース）を行なう。但し、Xが正規曲面の時、$\kappa(X):=\kappa(X-\mathrm{Sing}\,X)$ で定義する。一般に、$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は有理曲面になるかどうか、わかっていない。

§2では、$\kappa\leq 1$ の時を考察し、まず $\kappa=-\infty$ の log-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面の構造を決定する。$\kappa=0$ の $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は藤田氏によって分類されているが，特異点を持つ場合はよくわからない。次に $\kappa=1$ の時、$\mathbb{C}^*$-ファイバー空間の構造を持つ log-ホモロジー平面を決定する。

§3では、$\kappa=2$ の時を扱かい、我々は例として、$\mathbb{C}^{**}$-ファイバー空間の構造を持つホモロジー平面を考える。その構成方法を具体的にかくことができるが，その中に自明でない自己同型を持つものが存在し、しかもその曲面は可縮である。従って、前掲の Petrie の予想は、（ホモロジー平面を可縮代数曲

面とおきかえても)，成立しないことがわかり，$\mathbb{C}^*$の$\mathbb{C}^3$への作用の linearization の問題に対する Kraft らのプログラムは，有効でなくなった。

また，昨年の城崎シンポジュームで Petrie によって $\kappa=1$ のホモロジー平面に対しては，彼の予想は証明されているということを報告したが，実は誤解があったようで，彼の証明は，可縮曲面に対してしか通用しない。実際，任意の標数 p に対して $\kappa(X)=1$ のホモロジー平面で $\mathbb{Z}/2p+1$ が作用するものが存在する。

linearization の問題は一般の reductive 群の$\mathbb{C}^n$への作用についても考えることができるが，$SL_2(\mathbb{C})$ などについては，linearizable でない作用の例が最近 Schwartz によって与えられた。しかし，$\mathbb{C}^*$や有限アーベル群については未解決である。

§2. $\kappa\leq 1$ の log-ホモロジー平面.

いつものように，Xを正規射影平面Vの中に埋め込み，$D=V-X$とした時，VはDにそって非特異かつDは高々単純正規交叉の因子とする。$f: W\to V$をVの特異点の極小特異点解消，$Y:=f^{-1}(X)$，$\varphi:=f|_Y$，$\Sigma=\mathrm{Sing}\,X$，$\Delta=f^{-1}(\Sigma)$とおく。この時，次の補題が成り立つ。

補題1. (1) Xを$\log$-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面とする。

$\Rightarrow$ $q(W)=p_g(W)=0$. Dは単連結でXはアフィン曲面。

(2). Xを非特異有理曲面, $X=V-D$とおき次の条件を仮定する。

(a) Dは連結かつ単連結

(b) $H^2(V;\mathbb{Q})\to H^2(D;\mathbb{Q})$は同型.

この時. Xは$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面になり. 次の同型が成り立つ。

$$\mathrm{Pic}(X)=H_1(X;\mathbb{Z})\simeq \mathrm{Coker}(H^2(X;\mathbb{Z})\to H^2(D,\mathbb{Z}))$$

さらに $H_1(X;\mathbb{Z})=0$ が成り立つならば. Xはホモロジー平面である。

(3) Xを有理$\log$曲面(高々商特異点しかもたない正規曲面)で次の条件をみたすと仮定する。

(a) Dは連結かつ単連結

(b) $H^2(W;\mathbb{Q})\to H^2(D\cup\Delta,\mathbb{Q})$は同型.

この時. Xは$\log$-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面になり, 次が成り立つ。

$0\to H_1(\partial T;\mathbb{Z})\to H_1(X^\circ;\mathbb{Z})\to H_1(X;\mathbb{Z})\to 0$ は exact,

$H_1(X^\circ;\mathbb{Z})\simeq \mathrm{Pic}(W-D-\Delta)\simeq \mathrm{Coker}(H_2(D\cup\Delta;\mathbb{Z})\to H_2(W,\mathbb{Z}))$

但し ここで $X^\circ=X-Z$,

∂T := 特異点の閉近傍の境界の union

である。

さらに $H_1(X;\mathbb{Z})=0$ が成り立てば. Xは$\log$-ホモロジー平面。

証) (2)の略証を与える。まず次の $\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー完全系列を考える。

$$0 \to H^0(V;D) \to H^0(V) \to H^0(D) \to H^1(V;D) \to H^1(V) \to H^1(D)$$
$$\to H^2(V,D) \to H^2(V) \to H^2(D) \to H^3(V,D) \to H^3(V) \to 0$$
$$\to H^4(V,D) \to H^4(V) \to 0$$

仮定より $H^1(V) = H^1(D) = H^3(V) = 0$. これと双対定理から、

$$H_4(X;\mathbb{Z}) = H^0(V,D;\mathbb{Z}) = 0$$
$$H_3(X;\mathbb{Z}) = H^1(V,D;\mathbb{Z}) = 0$$
$$H_2(X;\mathbb{Z}) = H^2(V,D;\mathbb{Z}) = 0$$

((b) と $H^2(V;\mathbb{Z})$ が free であることによる。)

$$H_1(X;\mathbb{Z}) = H^3(V,D;\mathbb{Z}) = \mathrm{Coker}(H^2(V,\mathbb{Z}) \to H^2(D;\mathbb{Z}))$$

特に $H_1(X,\mathbb{Z})$ は有限群である。また、

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}(X) &= H^2(X,\mathbb{Z}) \\ &= \mathrm{Hom}(H_2(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}^1(H_1(X,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ &\simeq H_1(X,\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

§1で述べたように、log 曲面の小平次元を $\kappa(X) := \kappa(X - \mathrm{Sing}(X))$ で定義する。

<u>Case $\kappa = -\infty$</u>　$\kappa(X) = -\infty$ の log ホモロジー平面について次の事柄が成り立つ。

定理 1. Xを $\kappa(X)=-\infty$ の log-ホモロジー平面とすると、Xは次のどれかに同型である。

(1) $\mathbb{C}^2$

(2) $\mathbb{C}^2/G$： Gは $GL(2,\mathbb{C})$ の small 有限部分群.

(3) Xは $\mathbb{C}$-ファイバー空間 $\rho: X \to \mathbb{C}$ の構造を持ち、ρのファイバーはすべて既約。$H_1, \cdots, H_N$をρの multiple fibers の全体で、その重複度を$d_1, \cdots, d_N$とすると、各ファイバーH_i上に位数d_iの巡回特異点が丁度一個ずつ存在する。

(1), (2), (3)に属する曲面はいずれも可縮曲面である。

証) 宮西-角田の non-contractible boundary を持つ開曲面に対する構造定理によると、Xに対して次の二つのケースのいずれかが成り立つことがわかる。

(I). Xは $\mathbb{A}^1$-ファイバー空間の構造を持つ.

または、

(II) X^0の Zariski 開集合Uと、UからT'への固有双有理写像 $\varphi: U \to T'$が存在して次が成り立つ。

(1) $U=X^0$か、X^0-Uは純一次元。

(2) T'は$T:=\mathbb{C}^2/G-(0)$の開集合で $\dim(T-T')\leq 0$。

以下 (II)のケースを考える。Xはアフィン曲面であるから、

特に、ϕ は同型になる。従って、

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X^*) = \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})^* = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^* = \mathbb{C}^*$$

いま、$X^\circ - U$ が純一次元であるとし、$X^\circ - U = G_1 \cup \cdots \cup G_s$ を既約成分への分解とすると、

$$m(\bar{G}_1 + \cdots + \bar{G}_s) \underset{\text{linear equiv}}{\sim} F \qquad \operatorname{Supp} F \subseteq V - X$$

となる，正数 m，正因子 F が存在し、このことは V 上の、定数でない関数 h で、U 上で可逆になるものが存在することを意味する。これは矛盾。よって $X^\circ = U$，従って、

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'}) \simeq \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \simeq \Gamma(\mathbb{C}^2/G, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2/G})$$

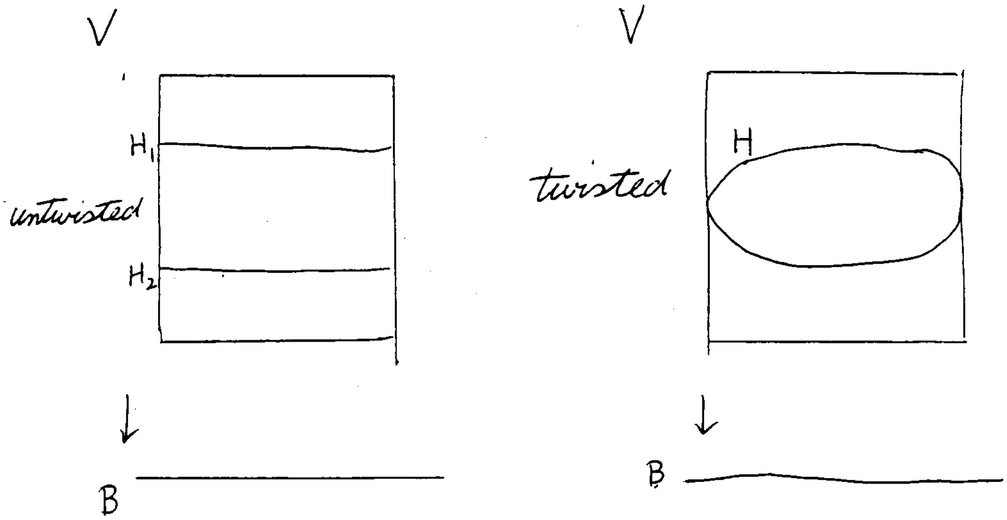
$$\therefore X \simeq \mathbb{C}^2/G$$

(I) の時は、補題1を使って、(3) の主張を得る。$\log$ ホモロジー平面についても、同様の結果を得る。

<u>Case $\kappa = 0$</u>　$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は藤田氏によって分類されている。特にホモロジー平面は存在しない。また藤田氏の記号で $H[k, -k]$，$Y\{3,3,3\}$ は自明でない自己同型を持つ。特異点を持つ場合はよくわからない。$\kappa = 0$ の $\log$ ホモロジー平面が存在するかどうか、わかっていない。

<u>Case $\kappa = 1$</u>　特異点のある場合，$\kappa = 1$ でも $\mathbb{C}^*$-ファイバー空

間の構造を持つかどうかわかっていない。ここでは、Xが $\mathbb{C}^*$-fibration $\pi: X \to C$を持つと仮定する。また、コンパクト化$X \hookrightarrow V$は、πのVへの拡張$p: V \to B$が存在する様に選んでおく。Dの既約成分で、pの一般のファイバー$p^{-1}(u)$ $(u \in B)$と交わるものの数は、2本以下であるが、丁度2本であるとき、untwisted、一本の時、twisted という。



次の3つのケースにわけて考える。

(A) untwisted $\quad C \simeq \mathbb{P}^1$

(B) twisted $\quad C \simeq \mathbb{A}^1$

(C) untwisted $\quad C \simeq \mathbb{A}^1$

（以上で全ての可能性が尽されている。）

Xを$\mathbb{C}^*$-ファイバー空間の構造を持つ log-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面とすると、次が成り立つ。ここでは、(A)、(B)のケースの結

果のみ述べる。(C)については論文参照。

<u>Case (A)</u>　$F_0, \cdots, F_n$ を π の特異ファイバーで、それぞれの重複度を $m_0, m_1, \cdots, m_n$ とすると、$(F_0)_{red} \cong \mathbb{C}$, $(F_i)_{red} \cong \mathbb{C}^*(1 \leq i \leq n)$。$H_1$ と H_2 を p の section で、$H_1 \cap H_2 = \phi$, $(H_1^2) = -a$ $(a \geq 0)$, $H_1, H_2 \subset D$ となるように選んでおく。V の特異点解消 W から、Hirzebruch 曲面 Σ_a への morphism $\sigma: W \to \Sigma_a$ で $\overline{H}_1 = \sigma(H_1)$ が minimal section になるものが存在する。$\sigma^*(\overline{H}_2) = \sum \delta_i (\overline{F}_i)_{red} + \cdots$ とする。但し $(\overline{F}_i)_{red}$ は $(F_i)_{red}$ の W 上の proper transform の閉包である。この時、次の事柄が成り立つ。

(1)　$\kappa(X) = 1,\ 0,\ -\infty$

$$\Leftrightarrow (n-1) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} > 0,\ =,\ < 0 、$$

(2)　特異点は存在すれば、d 次の巡回商特異点が F_0 上に一個だけ存在する。$H_1(X; \mathbb{Z})$ は有限群で、位数は

$$\frac{1}{d} \left| m_0 m_1 \cdots m_n a - \sum_{i=0}^{n} m_0 \cdots \hat{m}_i \cdots m_n \delta_i \right|$$

但し、$d | m_0$, $d | \delta_0$、さらに $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$ $(i \geq 2)$。

(3)　X が可縮 $\Leftrightarrow$ $a = 1$, $m_0 = d$, $n = 2$, $m_1 m_2 - m_1 \delta_2 - m_2 \delta_1 = \pm 1$.

<u>Case (B)</u>　H を D に含まれる p の 2-section とする。

(1)　$p|_H : H \longrightarrow B$ の分岐点を P_0, P_∞, $Q_0 = p|_H(P_0)$, $Q_\infty = p|_H(P_\infty)$ とする。$p^{-1}(Q_\infty) \subset D$ としてよい。$F_0 := \pi^*(Q_0) = m_0 C_0$, $C_0 \cong \mathbb{A}^1$

と書けるが、Xが特異点を持つ時C_0は、

(i) 一個の巡回商特異点か

(ii) DynkinタイプがD_rの商特異点か

(iii) 2個のA_1タイプの有理2重点

のいずれかを持つ。

(2) $F_i = m_i C_i \ (1 \leq i \leq r)$を他の特異ファイバーとする時$C_i \simeq \mathbb{C}$.

(3) $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0 \quad (i \geq 2)$

(ii), (iii)の時は $H_1(X, \mathbb{Z}) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$

(i) 又はXが非特異の時 $H_1(X, \mathbb{Z})$は $\mathbb{Z}/m_0\mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ の

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による extension.

(4) $\kappa(X) = 1, 0, -\infty$

$\Leftrightarrow (r-1) - \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i} > 0, \ = 0, \ \text{or} < 0.$

(5) 特に $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow \kappa(X) = -\infty$.

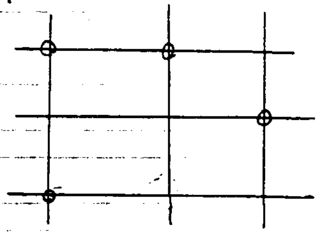
§3. $\kappa = 2$ の log ホモロジー平面の例

この節では $\mathbb{C}^{**} (= \mathbb{C} - \{2点\})$-ファイバー空間の構造を持つ log-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面を考える。$\kappa(\mathbb{C}^{**}) = 1$であるので、このタイプのlog-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は$\kappa = 2$になる可能性がある。明らかに、$\mathbb{C}$-ないし$\mathbb{C}^*$-ファイバー空間の構造を持つ場合を除くと、$\mathbb{C}^{**}$-ファイバー空間の構造を持つlog-$\mathbb{Q}$-ホモロジー平面は$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$または$F_1$上の曲線の次の様な配置から

得られることがわかる。

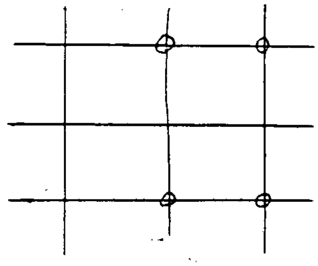
Type(UP_{3-1})

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



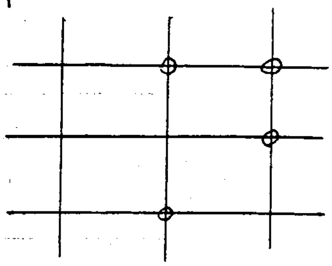
Type(UC_{2-1})

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



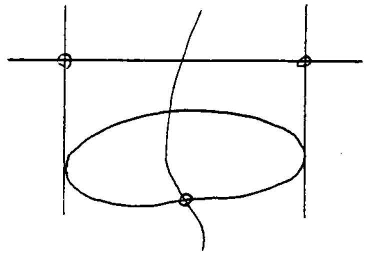
Type(UC_{2-1})$'$

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



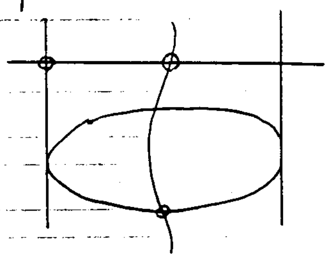
Type(TP_2)

F_1



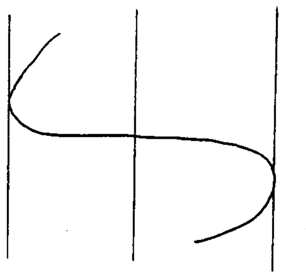
Type(TC_{2-1})

F_1

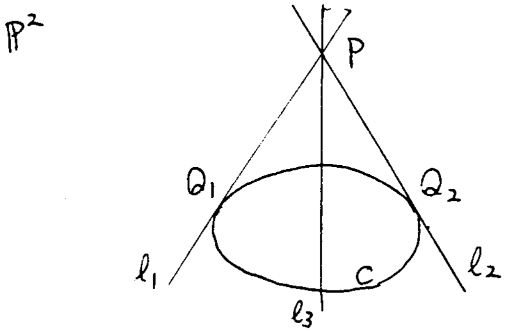


Type($T3C_2$)

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$



ここでは Type(TP_2) を説明する。まず、$\mathbb{P}^2$ 上の次の様な曲線の配置から出発する。

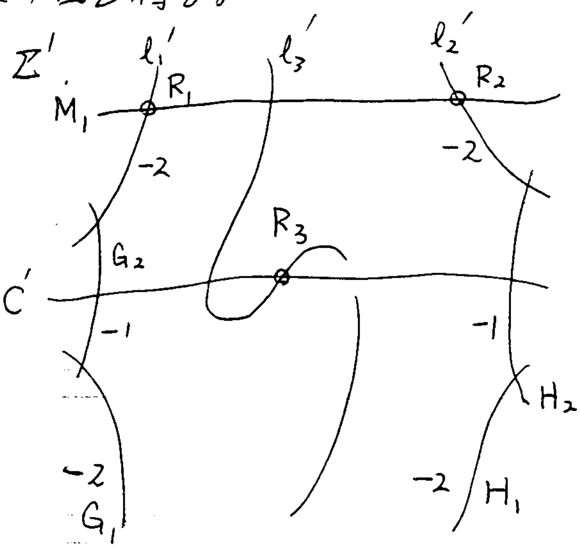


(X_0, X_1, X_2)を$\mathbb{P}^2$の斉次座標とするとき、l_1, l_2, l_3, Cは次式で定義される直線及び曲線である。

l_1:　$X_1 + X_0 = 0$　　　　l_2:　$X_1 - X_0 = 0$

l_3:　$X_1 = 0$　　　　C　$X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$.

$\mathbb{P}^2$のPを中心とするblowing-upによって最初の図を得るが、さらに $C \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$ のtotal transformが単純正規交叉にする様に、Q_1, Q_2をそれぞれ2回ずつblowing-upして次の図を得る。



M_1はPのblowupによって得られる(-1) curve.

続いて単連結な boundary divisor を得るために、R_1, R_2, R_3 及びその infinitely near points を中心として blowing-up を繰り返し、その合成を $\sigma: V \longrightarrow \Sigma_1'$ とする。但し blowing-up は $\sigma^{-1}(R_i)$ がそれぞれ (-1) curve を一個ずつ含み、その (-1) curve を $E_i\ (1 \leq i \leq 3)$ とした時、$D = \sigma^{-1}(M_1 + C' + \ell_1' + \ell_2' + \ell_3' + G_1 + G_2 + H_1 + H_2)_{red} - (E_1 + E_2 + E_3)$ が単連結になる様に選ぶ。$X := V - D$ とおくと補題1により X は $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面になる。また、

$\sigma^*(\ell_i') \sim u_i E_i +$ (other components)

$\sigma^*(M_1) \sim v_1 E_1 + v_2 E_2 +$ (other components)

$\sigma^*(C') \sim w_3 E_3 + \cdots$

とおくと、$\ell_1' + G_1 + 2G_2 \sim \ell_2' + H_1 + 2H_2 \sim \ell_3'$ かつ $2M_1 + 2\ell_3' \sim C' + \cdots$ より、$H_1(X, \mathbb{Z})$ は次の関係式をみたす $\xi_i := [E_i]$ で生成される。

$$
\begin{aligned}
u_1\xi_1 - u_2\xi_2 &= 0 \\
u_2\xi_2 - u_3\xi_3 &= 0 \\
2v_1\xi_1 + 2v_2\xi_2 + (2u_3 - w_3)\xi_3 &= 0
\end{aligned}
$$

従って $H_1(X, \mathbb{Z})$ の位数は $|d|$ に等しい。但し

$$d = u_1 u_2 (2u_3 - w_3) + 2u_2 u_3 v_1 + 2u_1 u_3 v_2$$

特に $d = \pm 1$ は、例えば次の様な整数解を持つ。

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 = m, \quad v_1 = v_2 = n, \quad w_3 = 2m + 4mn \pm 1 \ (m, n \geq 1)$$

また、上の整数値に対して $\kappa(X)=2$ を示すこともできる。これで $\kappa=2$ の $\mathbb{C}^{**}$-ファイバー空間の構造を持つホモロジー平面の系列を得た。しかも このホモロジー平面は可縮である。

$\mathbb{P}^2$ の involution $\iota: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ を $(X_0 : X_1 : X_2) \mapsto (X_0 : -X_1 : X_2)$ で定義すると ι は V の involution $\tilde{\iota}: V \to V$ を与え $\tilde{\iota}(D)=D$ をみたす。よって $\tilde{\iota}|_X$ は X の自明でない involution になり Homology plane conjecture の反例を与える。

残りのケースのうち、(UP_{3-1}), (UC_{2-1}) のタイプには、$\kappa=2$ のホモロジー平面が存在するが 残りのタイプには $\mathbb{Q}$-ホモロジー平面しか存在しない。

§4. *Some remarks*

(I). $\kappa=1$ のホモロジー平面で 自明でない自己同型を持つものが存在する。次の定理が成り立つ。

定理. 任意の素数 $p \neq 2$ に対して $\kappa=1$ のホモロジー平面 $X_m^{(p)}$ で $\mathbb{Z}/m$ が作用するものが存在する，但しここで

$$m = \begin{cases} 2,\ 2r+1 \text{ or } 4r+1 & \text{if } p=4r+1 \\ 2,\ 2r+1 \text{ or } 4r+3 & \text{if } p=4r+3 \end{cases}$$

である。

(II) 代数群の$\mathbb{C}^N$への作用の linearization problem は一般の reductive な代数群に対しても考えることができるが、Schwartz は $O_2=\mathbb{C}^*\rtimes\mathbb{Z}/2$ の $\mathbb{C}^4$ への作用及び SL_2 の $\mathbb{C}^7$ への作用で linearizable でない例を与えた。桝田氏らによって、この例から有限群の作用で linearizable でない例も構成されている。一方アーベル群 $\mathbb{C}^*$ や $\mathbb{Z}/m$ の $\mathbb{C}^N$ への作用については、$N\geq 3$ の時未解決である。$\mathbb{C}^*$ や $\mathbb{Z}/2$ の作用が linearizable であることがわかれば次の消去問題への応用がある。

Cancellation Problem　X を n 次元アフィン代数多様体で $X\times\mathbb{C}^m\simeq\mathbb{C}^{n+m}$ の時 $X\simeq\mathbb{C}^n$ か?

今、$X\times\mathbb{C}^m$ への $\mathbb{Z}/2$ の作用を $\tilde{\tau}=id\times\tau$, $\tau:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^m$ は $\tau(x_1,\cdots,x_m)=(-x_1,\cdots,-x_m)$ で定義すると、X は $\tilde{\tau}$ の fixed point locus になる。従って もし $\tilde{\tau}$ の $\mathbb{C}^{n+m}$ への作用が linearizable であれば $X\simeq\mathbb{C}^n$.

$n=2$ の時 Cancellation Problem は肯定的に解かれている。$\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^3$ への作用は fixed point locus の次元が一次元以上の時、linearizable であることが証明されているが、実はその証明には $n=2$ の時 Cancellation

Problemの解決に本質的であった $\mathbb{C}^2$の特徴づけを使っている。

References

1. T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 29(1982), 503-566.

2. M. Miyanishi and T. Sugie, Homology planes with quotient singularities, preprint.

3. M. Miyanishi and T. Sugie, Q-homology planes with C^{**}fibrations, preprint.

4. G. Shwartz, Exiotic algebraic group actions, preprint.